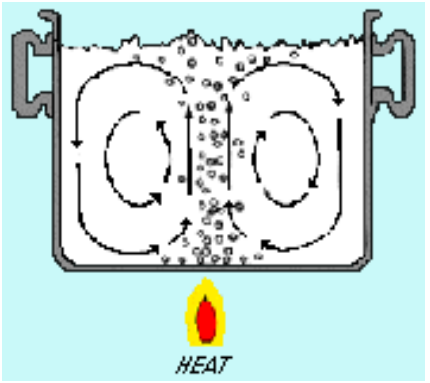
La convection

- La convection est le mode de transmission de la chaleur qui implique le déplacement d'un fluide, liquide ou gazeux.

- On la trouve dans l'échange qui a lieu entre une paroi et un fluide

- En réalité, il s'agit d'une combinaison du phénomène de conduction avec celui de transfert de matière.



- On distingue deux types de convection:

  - **Convection forcée** : le mouvement du fluide est dû à l'action d'une pompe.
  - **Convection naturelle** (ou libre) : le mouvement du fluide est crée par des différences de densité, elles-mêmes dues à des différences de température existant dans le fluide.

La convection : loi de Newton

• Il s'agit d'une relation dont la simplicité est trompeuse, mais qui permet de expliquer le phénomène global de la convection :

$$\dot{Q} = \alpha A (T_s - T_\infty) \quad \text{Loi de Newton}$$

• α : le coefficient d'échange convectif (W m^{-2} K^{-1})

•T_s : la température de la surface considérée

•T_∞ : la température du fluide « au large » (suffisamment loin de la surface)

• α dépend de l'état de surface, de la vitesse du fluide, et d'autres facteurs, mais on le traitera souvent comme une grandeur invariable.

		α (W m^{-2} K^{-1})
•Convection naturelle	air, gaz	5 à 50
•Convection forcée	air, gaz	10 à 500
•	eau	100 à 15000
•	huile	50 à 1500
•	métaux liquides	5000 à 250000

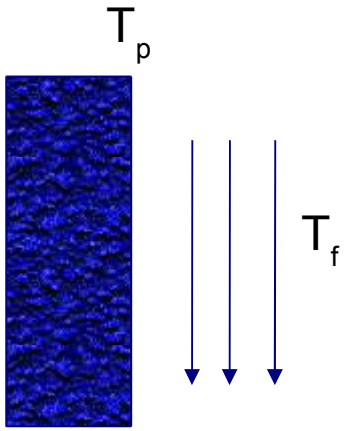
Example: transfert de chaleur entre deux fluides à travers une paroi

$q = h(T_1 - T_2)$ Conduction

$q = \alpha(T_p - T_f)$ Convection

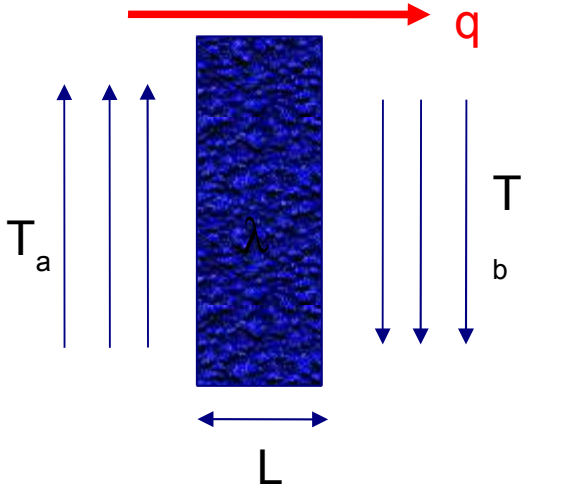
Les deux expressions sont formellement idéntiques, donc *nous pouvons utiliser les résultats de l'assocition en série ou en parallèle*

Cas d'une paroi et d'un fluide :



$$q = \alpha(T_p - T_f)$$

Cas d'une paroi et de deux fluides :



$$\frac{1}{h_{\text{équivalent}}} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{h_p} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{L}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$$

$$q = h_{\text{équivalent}}(T_a - T_b)$$

$$\dot{Q} = h_{\text{équivalent}} A(T_a - T_b)$$

Dérivées partielles : quelques expressions utiles (★ ★ ★)

Si $T = f(x, y, \tau)$ Le rapport : $\frac{dT}{dx}$ on l'écrira $\frac{\partial T}{\partial x}$ ★

A Lyon, la température d'après-demain est celle d'aujord'hui plus
la dérivée de la température par rapport au temps fois le temps écoulée.

Traduction : $T(x, y, \tau + \Delta\tau) = T(x, y, \tau) + \frac{\partial T}{\partial \tau}\Delta\tau$

Si $\Delta\tau$ est très petit, on peut écrire $\Delta\tau = d\tau$, et alors :

$T(x, y, \tau + d\tau) = T(x, y, \tau) + \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau$ ★

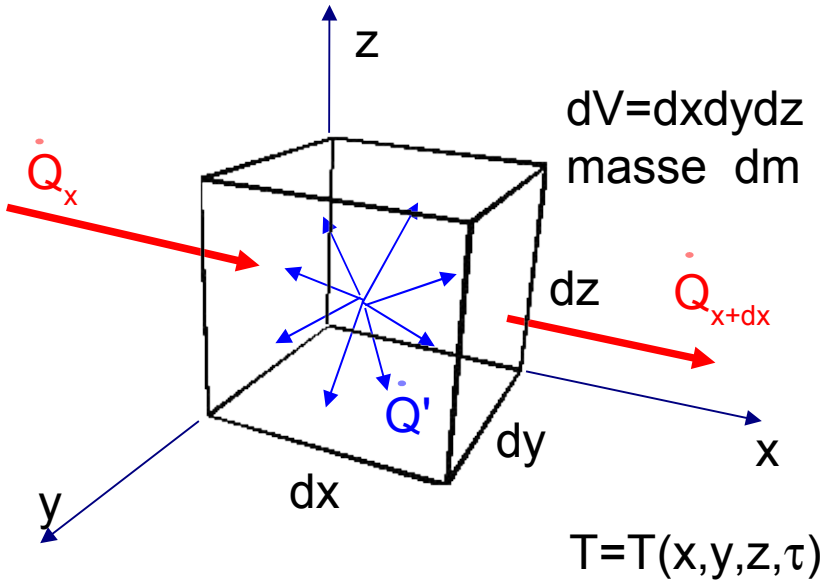
La dérivée d'une fonction est une fonction, donc je peux encore la dériver.
Les dérivées secondes s'écrivent:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x}$$ ★

L'équation générale de la conduction

Ecrivons le bilan thermique pendant un intervalle de temps dτ pour **un élément infinitésimal de volume dV = dxdydz** d'un solide

$\dot{Q}'$: flux de chaleur par unité de volume engendré par les sources à l'intérieur de l'élément de volume



Dans la direction x, le cube infinitésimal reçoit en un temps $d\tau$ une énergie : $\dot{Q}_x d\tau$

Dans la direction x, le cube infinitésimal perd en un temps $d\tau$ une énergie : $\dot{Q}_{x+dx} d\tau$

Bilan d'énergie:

Entrée + Production sur place = Sortie + Consommation sur place + Variation du stock

$$\overbrace{(\dot{Q}_x+\dot{Q}_y+\dot{Q}_z)\,d\tau}^{\text{entrée}} + \overbrace{\dot{Q}'\,dx\,dy\,dz\,d\tau}^{\text{production}} = \overbrace{(\dot{Q}_{x+dx}+\dot{Q}_{y+dy}+\dot{Q}_{z+dz})}^{\text{sortie}}\,d\tau + \overbrace{dU}^{\text{variation stock}}$$

L'équation générale de la conduction (cas unidimensionnel : suivant x)

$$\dot{Q}_x\, d\tau + \dot{Q}'\, dx\, dy\, dz\, d\tau = \dot{Q}_{x+dx}\, d\tau + dU$$

isolant dU et divisant par $d\tau$

$$\frac{dU}{d\tau} = (\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx}) + \dot{Q}'\, dV$$

mais nous avons aussi : $dU = dm\, c_p\, dT = \frac{dm}{dV} c_p\, dT\, dV = \rho\, c_p\, dT\, dV$

donc $\frac{dU}{d\tau} = \rho\, c_p \frac{dT}{d\tau} dV$ *Rappel* Si $T = f(x, y, \tau)$ Le rapport : $\frac{dT}{dx}$ on l'écrira $\frac{\partial T}{\partial x}$

donc $\rho\, c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dV = (\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx}) + \dot{Q}'\, dV$

Rappel $T(x, y, \tau + d\tau) = T(x, y, \tau) + \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau \Rightarrow \dot{Q}_{x+dx} = \dot{Q}_x + \frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx \rightarrow \quad \dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} = -\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx$

Mais par la loi de Fourier $\dot{Q}_x = -\lambda_x A \frac{\partial T}{\partial x} = \left(-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) dydz$

Où nous avons considéré que λ peut dépendre de la direction

$$\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx} = -\frac{\partial \dot{Q}_x}{\partial x} dx = -\frac{\partial\left(-\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} dydz\right)}{\partial x} dx = \frac{\partial\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right)}{\partial x} \underbrace{dxdydz}_{dV} = \left(\frac{\partial \lambda_x}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right) dV$$

Qui doit être introduit dans :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} dV = (\dot{Q}_x - \dot{Q}_{x+dx}) + \dot{Q}' dV$$

Et donne en regroupant les termes et en éliminant dV qui est facteur commun :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial \lambda_x}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \dot{Q}'$$

Equation générale de la conduction (généralisation à la conduction dans les 3D)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial \lambda_x}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_y}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial \lambda_z}{\partial z}\frac{\partial T}{\partial z} \right) + \left(\lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \dot{Q},$$

Quelles hypothèses ont été faites ?

1) On a négligé l'énergie due au travail des forces extérieures.

2) On a considéré une transformation à pression constante
(si on considère une transformation à volume constant, il faut remplacer c_p par c_v)

- Dans un solide $c_p \approx c_v$ et dans la plupart de cas, il faut des pressions très élevées pour donner lieu à une énergie de travail non négligeable

Donc des hypothèses raisonables

Remarque :
Dans beaucoup de cas l'équation générale de la conduction pourra être simplifiée.

Simplifications de l'équation générale de la conduction (cas 1D)

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial \lambda_x}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + + \dot{Q}'$$

a) S'il n'y pas de sources à l'intérieur du solide : Q'=0

b) Si le solide est isotrope (cas 3D) : $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda$

c) Si le solide est homogène : $\lambda \neq f(x,y,z)$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial \tau} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ou en définissant la diffusivité thermique $\alpha \equiv \frac{\lambda}{\rho c_p}$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Equation de Laplace

d) En régime permanant $\left(\frac{\partial}{\partial \tau} = 0\right)$

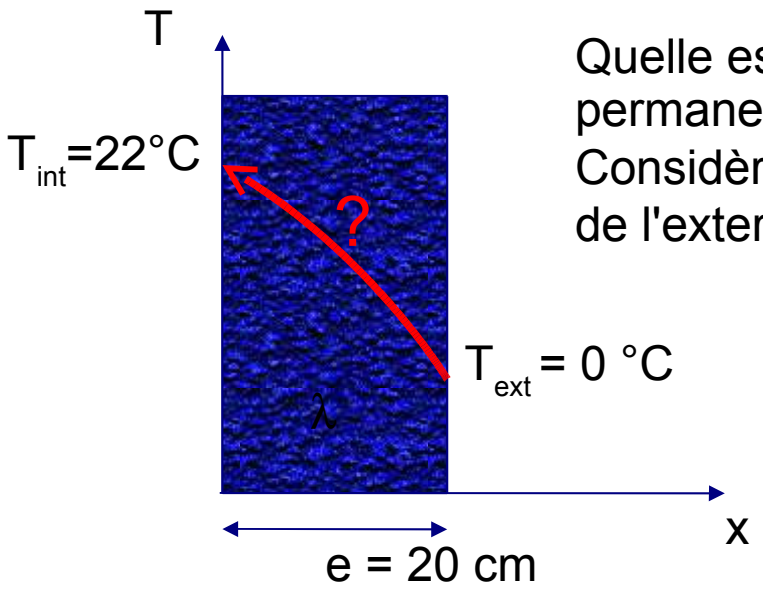
$$\rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Si b), c) et d) mais pas a):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\dot{Q}'}{\lambda} = 0$$

Equation de Poisson

Exemple d'application



Quelle est la distribution de températures en régime permanent à l'intérieur d'un mur d'une maison ? Considèrer que le mur sépare une pièce chauffée à 22 °C de l'exterieur à 0 °C.

L'intérieur du mur n'est pas chauffé : $\dot{Q}' = 0$

$$\Rightarrow \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \Rightarrow \frac{d\left(\frac{dT}{dx}\right)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dx} = A$$

$$\Rightarrow dT = A\,dx \Rightarrow \int dT = A \int dx \Rightarrow T = Ax + B$$

La valeur des coefficients A et B on les trouve en imposant les conditions limites :

Pour x= 0, T= 22 °C $\Rightarrow$ $B = 22\ ^oC$

Pour x= 20 cm, T= 0 °C $\Rightarrow$ $0 = 20A + 22 \Rightarrow A = -1.1\ ^oC\,cm^{-1}$